Internationales Studienkolleg der Hochschule Kaiserslautern

Semester: Wintersemester 2022/2023

FSP-Teilprüfung: Mathematik «Kurs»

Datum: 29.11.2022

Dauer: 90 Minuten

Prüfer: Dr. Jens Siebel, StD. Werner Müller, Jörg Wilhelm

Aufgabe 1 (Wilhelm)

Hinweis: Rechnen Sie, falls erforderlich, auf jeweils drei Nachkommastellen genau!

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 3 + 2 \cdot i$ und $z_2 = 2 - \sqrt{5} \cdot i$.

a) Wandeln Sie z_1 und z_2 in die Exponentialform um *(2 Punkte)*.

b) Berechnen Sie z_1^4, und geben Sie das Ergebnis in der trigonometrischen Form an *(2 Punkte)*.

c) Berechnen Sie jeweils in kartesischer Form:

c1) $z_1 - \overline{z}_2$ *(1 Punkt)*,

c2) $\overline{z}_1 \cdot z_2$ (1 Punkt),

c3) $\frac{z_1}{z_2}$ *(1 Punkt)*.

d) Bestimmen Sie alle Lösungen w der Gleichung $w^3 = z_2$ *(3 Punkte)*.

Aufgabe 2 (Dr. Siebel)

Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem:

$f''(x) + f(x) = \cos(x),\ f(0) = 1,\ f'(0) = 0$ *(10 Punkte)*.

Aufgabe 3 (Dr. Siebel)

Kreuzen Sie jeweils das Feld ☐ mit der einzigen richtigen Alternative an *(10 Punkte)*.

richtige Antwort: 1 Punkt falsche bzw. fehlende Antwort: 0 Punkte

a)	$\frac{z}{\bar{z}} =$			
/1	1 ☐	$\lvert z\rvert \cdot e^{i\cdot \arg z}$ ☐	$\left[\cos(2\cdot\arg z)+i\cdot\sin(2\cdot\arg z)\right]$ ☐	-1 ☐
b)	Für welche Funktion gilt $f'(x)=\ln\left[f(x)\right]$?			
/1	$f(x)=1^x$ ☐	$f(x)=e^x$ ☐	$f(x)=\ln(x)$ ☐	$f(x)=x^2$ ☐
c)	$\vec{a}\bullet\vec{a}=$			
/1	$\lvert\vec{a}\rvert^2$ ☐	0 ☐	1 ☐	$\lvert\vec{a}\rvert$ ☐
d)	$f_p(x)=x\cdot e^x$ ist der Ansatz zur partikulären Lösung von:			
/1	$f'(x)-f(x)=e^{-x}$ ☐	$f'(x)+f(x)=e^x$ ☐	$f'(x)=e^x$ ☐	$f'(x)-f(x)=e^x$ ☐
e)	Die Determinante von $A=\begin{pmatrix} t^2 & 8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ hat ihren minimalen Wert für:			
/1	$t=-4$ ☐	$t=0$ ☐	$t=1$ ☐	$t=4$ ☐
f)	Für welche Funktion gilt beim Newtonverfahren $x_1=\frac{x_0}{2}$?			
/1	$f(x)=x$ ☐	$f(x)=e^x$ ☐	$f(x)=\frac{1}{x}$ ☐	$f(x)=x^2$ ☐
g)	$f'(x)=\sqrt{x}\quad \mathbb{D}_f=[0,\infty[$ ist die erste Ableitung von:			
/1	$f(x)=x\cdot\sqrt{x}$ ☐	$f(x)=\frac{2}{3}\cdot x\cdot\sqrt{x}$ ☐	$f(x)=\frac{3}{2}\cdot x\cdot\sqrt{x}$ ☐	$f(x)=2\cdot\sqrt{x}$ ☐
h)	Was ist kein Normalenvektor von $\varepsilon:\quad x-y+2\cdot z=1$?			
/1	$\vec{n}=\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ☐	$\vec{n}=\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$ ☐	$\vec{n}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☐	$\vec{n}=\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$ ☐
i)	Welche Funktion hat keine horizontale Asymptote?			
/1	$f(x)=\frac{x-1}{1+x}$ ☐	$f(x)=\frac{x-1}{1+x^2}$ ☐	$f(x)=\frac{x^2-1}{1+x}$ ☐	$f(x)=\frac{x^2-1}{1+x^2}$ ☐
j)	Die Lösungsmenge des LGS $\left(\begin{array}{cc\|c} e & e^2 & 1 \\ 1 & e & e \end{array}\right)$ ist:			
/1	$L=\{x=0,\ y=1\}$ ☐	$L=\{x=1,\ y=1\}$ ☐	$L=\varnothing$ ☐	$L=\{x=1,\ y=-1\}$ ☐
Summe:	**/10**			

Aufgabe 4 (Wilhelm)

a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge $\mathbb{D}_f \subset \mathbb{R}$ für die Funktion $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-\ln(x)}$ *(2 Punkte)*.

b) Prüfen Sie, ob folgende Funktion an der Stelle $x_0=-2$ stetig ist:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+3\cdot x^2 & x>-2 \\ -5\cdot x^2-10\cdot x+4 & x\le -2 \end{cases}$$ $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ *(3 Punkte)*.

c) Bestimmen Sie jeweils $f'(x)$:

c1) $f(x)=5\cdot\sqrt{x}\cdot\sin(x)$ $\mathbb{D}_f=[0,\infty[$ *(1 Punkt)*,

c2) $f(x)=\frac{3\cdot x^2}{5-e^x}$ $\mathbb{D}_f=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ne\ln(5)\}$ *(1 Punkt)*,

c3) $f(x)=\sqrt{\cos(x)+8\cdot x^2}$ $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ *(1 Punkt)*.

d) Bestimmen Sie alle reellen horizontalen und alle reellen vertikalen Asymptoten von $f(x)=\frac{x\cdot(x-2)\cdot 8\cdot x}{x^2-6\cdot x+9}$ *(2 Punkte)*.

Aufgabe 5 (StD. Müller)

a) Prüfen Sie $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}8\\-2\\-3\end{pmatrix}$ auf lineare Unabhängigkeit *(1 Punkt)*.

b) Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2\cdot x+2\cdot y-3\cdot z&=-7\\ -x-2\cdot y-2\cdot z&=3\\ 4\cdot x+y-2\cdot z&=-1 \end{aligned}$$ *(2 Punkte)*.

c) Die Ebene ε auf geht durch die Punkte $A(0|0|-1)$, $B(1|1|0)$ und $C(3|1|1)$.

c1) Bestimmen Sie eine Koordinatenform von ε *(2 Punkte)*.

c2) Die Gerade $\mathcal{g}$ geht durch die Punkte $P(2|5|5)$ und $Q(6|4|9)$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt von $\mathcal{g}$ und ε *(3 Punkte)*.

c3) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $R(1|-1|-2)$ von ε *(2 Punkte)*.

Aufgabe 6 (StD. Müller)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen, die Extrempunkte und die Wendepunkte *(3 Punkte)*.

b) Prüfen Sie die Funktion mathematisch auf Symmetrie zur y-Achse sowie zum Nullpunkt *(2 Punkte)*.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $T(5|20)$ *(2 Punkte)*.

d) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Funktion und der x-Achse im Intervall $x \in [-2; 3]$ eingeschlossen wird, auf drei Nachkommastellen genau *(3 Punkte)*.